Dualité

Données : $\mathbb{K}$ est un cc, E un $\mathbb{K}$-ev

I Formes linéaires, hyperplans

Déf : Une forme linéaire est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$

Ex : 1) formes coordonnées sur $\mathbb{K}^n$ $\left((x_1 \dots x_n) \xrightarrow{\pi_i} x_i\right)$ mesures | intégrales
| évaluations

2) FL continues sur les espaces normés $\to$ dual topologique

Prop : Un el^t $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ est surjectif

D) Soit $a \in E$ tq $\varphi(a) \neq 0$, si $\mu \in \mathbb{K}$ $\mu = \varphi\left(\frac{\mu}{\varphi(a)} a\right)$ $\Big| \begin{array}{l} \exists b \in E \\ \varphi(b) = 1 \end{array}$

Hyperplans :

Th-déf : Soit H un s-e-v de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) $\exists a \in E \setminus H$ tq $H \oplus \mathbb{K}a = E$
2) $H \neq E$ et $\forall b \in E \setminus H$, $H \oplus \mathbb{K}b = E$
3) $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0\}$ $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$
4) H est maximal parmi les sev stricts de E
5) Si E est DF, alors $\dim H = \dim E - 1$

D/ 1) ⇒ 3) si F sev de E et $x \in E \setminus \{0\}$ $x \notin F \Leftrightarrow \mathbb{K}x \cap F = \{0\}$

Soit $a \in E$ tq $H \oplus \mathbb{K}a = E$; si $x \in E$ on écrit $x = h + \lambda a$

$(h, \lambda) \in H \times \mathbb{K}$, de façon unique, on pose correctement $\varphi(x) = \lambda$

L'unicité donne tout $(\varphi(a) = 1)$

③ ⇒ ② Si $b \in E \setminus H$, on a $\left| \begin{array}{l} \mathbb{K}b \cap H = \{0\} \\ \varphi(b) = \mu \neq 0 \end{array} \right.$. Soit $x \in E$, soit

$\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)}$ il vient $\varphi(\lambda b) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} \varphi(b) = \varphi(x)$ donc $x - \lambda b \in \operatorname{Ker} \varphi = H$

et $x = (x - \lambda b) + \lambda b$

② ⇒ ① clair

② ⇒ ④ Soit F un sev de E contenant H, si $H \subsetneq F$, on peut

trouver $b \in F \setminus H$, alors $H \oplus \mathbb{K}b \subset F$, donc $E = F$

④ ⇒ ② $E \setminus H \neq \emptyset$ car H est strict, si $b \in E \setminus H$, il vient

$H \subsetneq H \oplus \mathbb{K}b$, donc $H \oplus \mathbb{K}b = E$, par maximalité

⑤ ⇔ ④ en Dj : clair

Ex $\left\{ f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \,\middle|\, \int_0^{2\pi} f = 0 \right\}$

Prop : Soient $\varphi, \psi \in E^* \setminus \{0\}$. Alors $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi \Leftrightarrow \psi$ et φ sont proportionnels

D/ ① clair ① $H = \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$. Soit $a \in E \setminus H$ (ça $(\varphi \neq 0)$)

On a donc $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C} = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$

On regarde $\psi - \lambda \varphi$ $\left| \begin{array}{l} \text{nul sur } H \\ \text{nul en } a \end{array} \right.$ → sur $H \oplus \mathbb{K}a = E$ nul, donc $\psi = \lambda \varphi$

178

H

Equation d'un hyperplan

Donnée $\left|\begin{array}{l}(e_1,\dots,e_n) \text{ base de } E \\ H \text{ hyperplan de } E \text{ dot}\end{array}\right)$ on sait $H = \operatorname{Ker}\varphi$; $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$

Or $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ où $\left|\begin{array}{l} a_i = \varphi(e_i) \\ i = 1 \dots n \end{array}\right.$ $(a_i) \neq (0)$

(H) $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ Toute autre equation est prop.

Ex 1 Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ Mq $\Updownarrow \begin{array}{l} (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \text{ libre} \\ \Phi\begin{pmatrix} E \longrightarrow \mathbb{K}^p \\ x \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) \end{pmatrix} \text{ est surj} \end{array}$

Ex 2 On suppose $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ libre Mq $\Updownarrow \begin{array}{l} \varphi \in \operatorname{Vect}(\varphi_i) \\ \operatorname{Ker}\varphi \supset \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}\varphi_i \end{array}$

① Double contraposée

si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est liée il existe $(\lambda_i) \neq (0)$ tq $\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_p \varphi_p = 0$

Alors $\operatorname{Im}\Phi \subset H = \left\{ y \in \mathbb{K}^p \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \right\} \subsetneq \mathbb{K}^p$

Si Φ n'est pas surjective $\operatorname{Im}\Phi \subset H$ hyperplan d'eq $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_p y_p = 0$

Alors $\forall x \in E$, $\lambda_1 \underbrace{\varphi_1(x)}_{y_1} + \dots + \lambda_p \underbrace{\varphi_p(x)}_{y_p} = 0$

② $\Downarrow$ Clair $\varphi = \mu_1 \varphi_1 + \dots + \mu_p \varphi_p$ — —

$\Uparrow$ Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi)$ est libre $\Phi\begin{pmatrix} E \longrightarrow \mathbb{K}^{p+1} \\ x \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x), \varphi(x)) \end{pmatrix}$

est surjective il existe $x \in E$ tq $\Phi(x) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ absurde

Ex (I) Soit $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formant un SL libre

Mq $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ $\det\left[f_i(x_j)\right]_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$

S/ $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, Soit $G = \mathrm{Vect}(F(x))_{x \in \mathbb{R}}$

1^er cas : $G \neq \mathbb{R}^n$ alors $G \subset H$ hypp $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$ $(\lambda_i) \neq (0)$

il vient donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$ absurde

2^e cas : $G = \mathbb{R}^n$

Alors $(F(x))_{x \in \mathbb{R}}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^n$ on peut

en extraire une base $F(x_1) \dots F(x_n)$ $\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$ est de rang n

II Base duale, polaire E est DF, lorsque $x \in E$, $\varphi \in E^*$ on note $\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x)$

Th-déf : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E

il existe, et de façon unique $(e_1^*, \dots, e_n^*) \in E$ tq $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij}$

$(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est alors une base de E^* de E^* appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$

D/ Premier point : définition d'une AL sur une base

Deuxième point si $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^n$ vérifie $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0$, en

appliquant à e_k, il vient $\lambda_k e_k^*(e_k) = 0$ ie $\lambda_k = 0$

Or $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim E \dim \mathbb{K} = \dim E$ (DF)

donc (e_i^*), qui est libre, est une base de E^*

RM Si $\varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle e_i, \varphi\rangle}_{\varphi(e_i)} e_i^*$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Les deux applications sont} \\ \text{égales sur } e_1, \dots, e_n \end{array} \right.$

$\mathbb{R}[X]$ $e_n^* \mid X^m \mapsto 0$ si $m \neq n$, $X^n \mapsto 1$

(0) **Contre ex en dim infinie**: Soit $\varphi : P = \sum_{n=0}^{\deg P} a_n X^n \longrightarrow \sum_{n=0}^{d} a_n$

En effet : Si $\varphi \in \mathrm{Vect}(e_n^*)$ $\exists \left| \begin{array}{l} N \in \mathbb{N} \\ \lambda_0, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}^{N+1} \end{array} \right.$ $\varphi = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k e_k^*$

$\varphi(X^{N+1}) = 1 = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k e_k^*(X^{N+1}) = 0$

Th: Soit F un sev de E ($\dim F$). Alors F est intersection de $n - \dim F$ hyperplans.

D/ Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, que l'on complète par en $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ une base duale.

Alors $F = \bigcap_{i=p+1}^{n} \mathrm{Ker}\, e_i^*$: Si $i \geqslant p+1$ et $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$ il vient

$e_i^*(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k \underbrace{e_i^*}_{\geqslant p+1}\underbrace{(e_k)}_{\leqslant p} = 0$

Si $x \in \bigcap_{i=p+1}^{n} \mathrm{Ker}(e_i^*)$, et $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ il vient $x_i = 0$

$i = p+1, \dots, n$, $x \in F$.

Polaire: (orthogonal)
On considère les notations du th
$F^\circ = F^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in F, \langle x, \varphi\rangle = 0\}$
2 notations

Prop : $F^\circ = \text{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$

D/ Soit $\varphi \in E^*$, on écrit sur la base duale $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^*$

alors φ annule tous les $x \in F \iff \varphi$ annule $e_1 \dots e_p$

$\overset{CL}{\iff} \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 \iff \varphi \in \text{Vect}(e_i^*)_{p+1 \leq i \leq n}$

$^t(UM) = {}^tM\,{}^tU$

Systématiquement : Si $G \underset{sev}{\subseteq} E^*$ on note $G^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in G \ \langle x, \varphi \rangle = 0\}$

Prop : $F^{\circ\circ} = F$

En effet $F^{\circ\circ} = \text{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)^\circ = \{x = \sum_1^n x_k e_k \mid x_{p+1} = \dots = x_n = 0\}$
$= F$

DM → **Transposition** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit $^tu : E^* \to E^*$

tq $\forall \varphi \in E^*$, $^tu(\varphi) = \varphi \circ u$

Thm : $\forall (x, \varphi) \in E \times E^*$ $\langle u(x), \varphi \rangle = \langle x, {}^tu(\varphi) \rangle$

Props : 1) $u \longmapsto {}^tu$ est linéaire
2) $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ $^t(u \circ v) = {}^tv \circ {}^tu$

$E \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} E \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}$

3) Soit $\left| \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}(E) \\ \text{un sev de } E, \text{ alors} \end{array} \right.$ $\Updownarrow$ $\begin{array}{l} F \text{ stable par } u \\ F^\circ \text{ stable par } {}^tu \end{array}$

(i) Soit $\varphi \in F^\circ$, pour tout $x \in F$ on a $\langle x, {}^t u(\varphi) \rangle = \langle u(x), \varphi \rangle$

Or $u(x) \in F$, donc $\langle u(x), \varphi \rangle = 0$, Bref ${}^t u(\varphi) \in F^\circ$

(ii) Soit $x \in F$. Pour toute $\varphi \in F^\circ$ on a ${}^t u(\varphi) \in F^\circ$ (hyp)

donc $\langle x, {}^t u(\varphi) \rangle = \langle u(x), \varphi \rangle$ (Bref $\forall \varphi \in F^\circ, \langle u(x), \varphi \rangle = 0$)

Aussi $u(x) \in F^{\circ\circ}$ donc $u(x) \in F$

III Trace

Déf. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On pose $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A(i,i)$

Prop : 1) $\mathrm{Tr} \in M_n(\mathbb{K})^*$
2) $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

D/ $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)(i,i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A(i,k) B(k,i)\right) = \sum_{1 \le i,k \le n} A(i,k)B(k,i)$

$= \sum_{1 \le i,k \le n} B(k,i) A(i,k) = \sum_{k=1}^{n} (BA)(k,k)$

3) $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$

Déf: Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$, β une base de E. Alors $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_\beta(u))$ ne dépend pas de la base β choisie ; on note la valeur $\mathrm{Tr}(u)$.

D/ Soit β' une deuxième base de E ; Soit $P = \mathrm{Mat}_\beta(\beta')$

Si $x \in E$ $\begin{cases} X = [x]_\beta \\ X' = [x]_{\beta'} \end{cases}$ alors $X = PX'$

$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} P_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij} x'_j\right)}_{x_i} e_i$

RM : $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ donne $f(PX') = 0$ en nouvelles coordonnées

il vient alors avec $A = \mathrm{Mat}_\beta(u)$ $A' = \mathrm{Mat}_{\beta'}(u)$

les relations caractéristiques $\underbrace{Y}_{u(x)} = \underbrace{AX}_{x/\text{ds }\beta}$ et $Y' = A'X')_{\text{ds }\beta'}$

Soit $PY' = APX'$ enfin $A' = P^{-1}AP$

Ex ① Soit $(a, \varphi) \in E \times E^*$ et soit $u \begin{pmatrix} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \varphi(x)a \end{pmatrix}$

Trouver $Tr(u)$

② Trouver les $\varphi \in M_n(\mathbb{K}^*)$ tq $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ $\varphi(AB) = \varphi(BA)$

puis $Tr(p) = rg(p)$, applications

S/ Soit $\underbrace{(e_1, \dots, e_n)}_{\beta}$ une base de E tq $e_1, \dots, e_{n-1}$ soit une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$

alors $[u]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \varphi(e_n)b_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varphi(e_n)b_n \end{pmatrix}$ où $a = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k$

$tr\,u = \varphi(a)$

② On utilise les (E_{ij}) si $i \neq j$ $\quad f(E_{ij}) = f(E_{ii}E_{ij})$

$= f(E_{ij}E_{ii}) = f(0)$

$f(E_{ij}) = 0$

$f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj})$ ✓

Projecteurs :

Prop Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur : $\mathrm{tr}\, p = \mathrm{rg}\, p$

D/ On choisit une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\mathrm{Ker}\, p$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\mathrm{Im}\, p$ ...

La mat de proj $P = M^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} M$ $\quad \mathrm{tr}\, p = \mathrm{rg}\, p$

Ex : Soient $p_1, \dots, p_s$ des projecteurs de $\mathbb{C}^m$ tq $p_1 + \dots + p_s = \mathrm{Id}$

Mq $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$

S/ On a $\mathrm{Im}\, p_1 + \dots + \mathrm{Im}\, p_s = E$

et $\mathrm{tr}(p_1 + \dots + p_s) = n$ donc $\mathrm{rg}(p_1) + \dots + \mathrm{rg}(p_s) = n$

et alors $\mathrm{Im}\, p_1 \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}\, p_s = E$

Rappel Soit $E_i = \mathrm{Im}\, p_i$, $f \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_s \longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_s) \longmapsto x_1 + \dots + x_s \end{cases}$

$\dim E_1 \times \dots \times E_s = \sum \dim E_i$ donc f iso ssi $\dim E = \sum \dim E_i$

ce qui donne le fait que c'est une somme directe

Soit $x \in E$: $p_1 \circ p_1(x) + \underbrace{p_2 \circ p_1(x)}_{\substack{y_2 \\ \in \mathrm{Im}\, p_2}} + \dots + \underbrace{p_s \circ p_1(x)}_{\substack{y_s \\ \in \mathrm{Im}\, p_s}} = p_1(x)$

donc $y_2 + \dots + y_s = 0$ par somme directe

Complément

Ex $\Phi \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})^* \\ A \longmapsto \Phi_A : B \longmapsto Tr(AB) \end{cases}$

S/ $\dim M_n(\mathbb{K})^* = \dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$

IS de prouver que Φ injective, si $\Phi_A = 0$ il vient

tq $\forall B \in M(\mathbb{K})$, $Tr(AB) = 0$

$$\forall (i,j) \in [1, n]^2 \quad \underbrace{Tr(A E_{ij})}_{A(j,i)} = 0$$

Ex Soit H un Hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$, Mq H contient au moins une matrice inversible

S/ Il existe $\begin{cases} A \in M_n(\mathbb{K}) \\ A \neq 0 \end{cases}$ tq $H = \mathrm{Ker}\, \Phi_A$

Decomposition / rang $A = P J_r Q$ P, Q inversible $J_r = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $r = rg A$

$M \in H \iff Tr(P J_r Q M) = 0 \iff tr(J_r Q M P) = 0$ avec $QMP = B$ inv

QMP inversible

$Tr(B J_r) = 0 \iff \sum_{i=1}^{r} b_{ii} = 0$: on prend $B = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient, et

alors $M = Q^{-1} B P^{-1}$ inv, OK.